

De la photographie numérique à la photographie computationnelle

Séance 2 Analyse de Fourier et images

Frédéric SUR

École des Mines de Nancy
LORIA

www.loria.fr/~sur/enseignement/photo/

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Conclusion

Décomposition des signaux périodiques

Principale idée du traitement du signal :

→ les signaux *périodiques* sont approchés par des superpositions de "sinusoïdes".
(combinaisons linéaires)

Spectre = ensemble des coefficients de cette combinaison linéaire.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

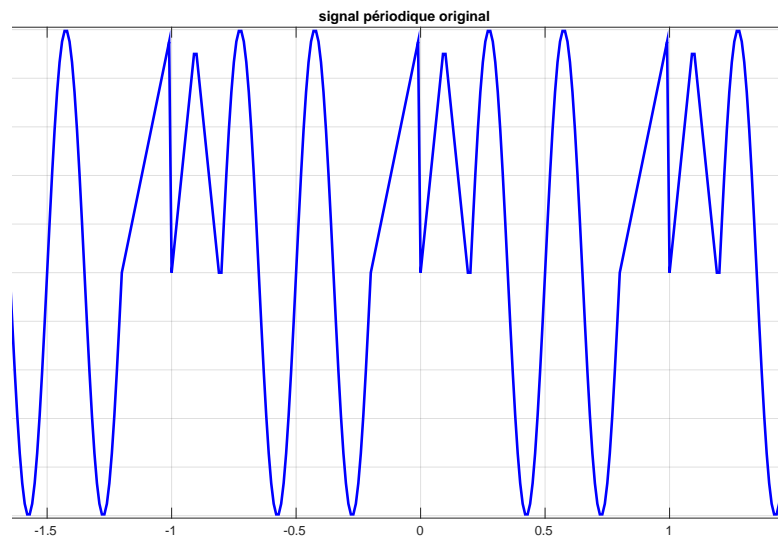
Conclusion

Conclusion

1/33

2/33

Exemple d'approximation d'un signal périodique



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

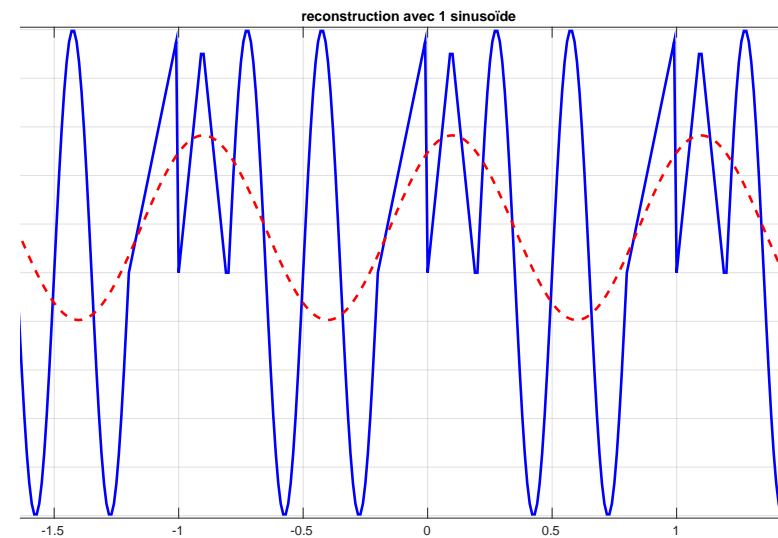
Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Conclusion

Exemple d'approximation d'un signal périodique



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

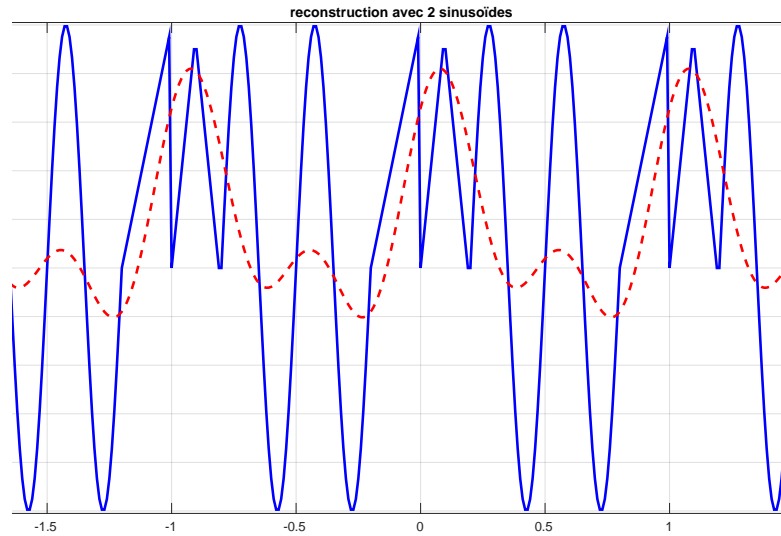
Conclusion

Conclusion

3/33

3/33

Exemple d'approximation d'un signal périodique



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

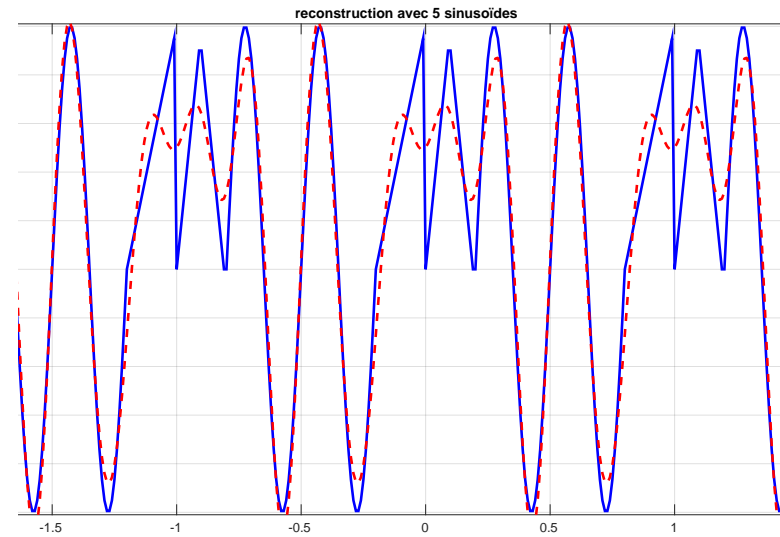
Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Exemple d'approximation d'un signal périodique



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

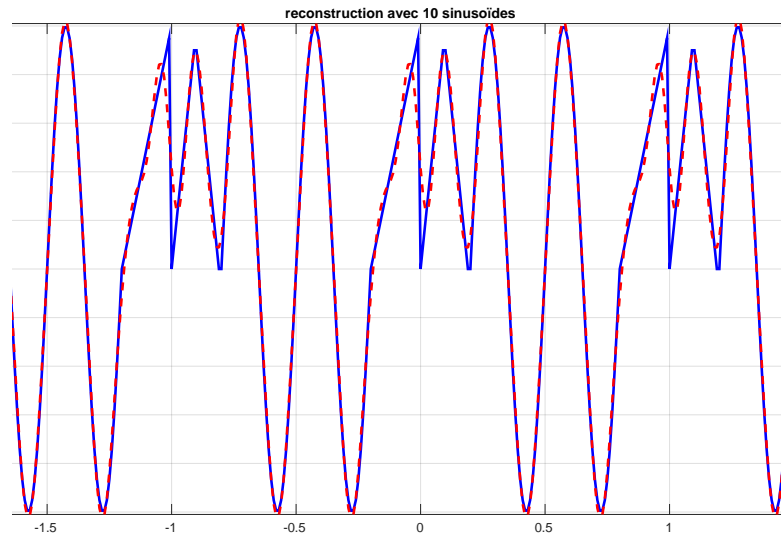
Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

3/33

3/33

Exemple d'approximation d'un signal périodique



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

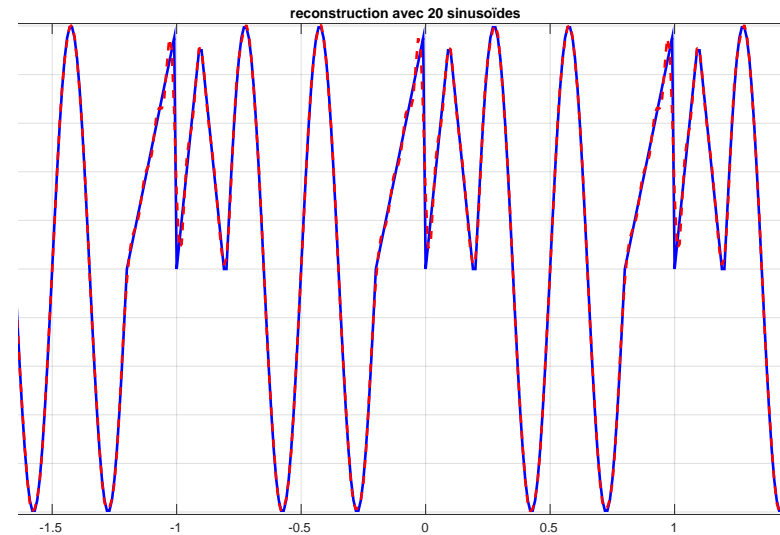
Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Exemple d'approximation d'un signal périodique



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

3/33

3/33

Premières propriétés "empiriques"

Remarque 1 : les sinusôides de haute fréquence "raffinent" le signal.

→ les coefficients HF sont petits.
(d'autant plus petit que le signal est "régulier")

Remarque 2 : compacité de la représentation.

→ relativement peu de sinusôides pour approcher un signal.

Rappel : formule d'Euler

Notation complexe :

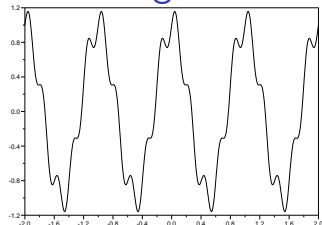
$$e^{i2\pi fx} = \cos(2\pi fx) + i \sin(2\pi fx)$$

$$\cos(2\pi fx) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi fx} + e^{-i2\pi fx})$$

$$\sin(2\pi fx) = \frac{1}{2i} (e^{i2\pi fx} - e^{-i2\pi fx})$$

$$\cos(2\pi fx + \phi) = \frac{e^{i\phi}}{2} e^{i2\pi fx} + \frac{e^{-i\phi}}{2} e^{-i2\pi fx}$$

Polynômes trigonométriques



$$p(t) = \cos(2\pi t) + 0.2 \sin(10\pi t)$$

Définition - \mathcal{T}_N : poly. trigo. de degré $\leq N$ et période a

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n (e^{2i\pi t/a})^n = \sum_{n=-N}^N c_n e_n(t).$$

avec $c_n \in \mathbb{C}$.

Autre représentation :

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi nt/a) + b_n \sin(2\pi nt/a).$$

où $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ ($n \geq 0$).

Rappel : décomposition en série de Fourier

Question : peut-on décomposer un signal périodique de période a sous la forme $\sum c_n e^{2i\pi nt/a}$?

Théorème - approximation dans \mathcal{T}_N

Si $f \in L^2_p(0, a)$, il existe un unique f_N dans \mathcal{T}_N tel que :

$$\|f - f_N\|_2 = \min\{\|f - p\|_2, p \in \mathcal{T}_N\}.$$

$$\text{On a : } f_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi nt/a}$$

$$\text{où : } c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{-2i\pi nt/a} dt.$$

Démonstration : poly th. 4 sec. 1.3.2.

Définition - Coefficients de Fourier

c_n est le n -ème coefficient de Fourier de $f \in L^2_p(0, a)$.

→ coefficient de la composante de fréquence $|n|/a$.

Propriétés des coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{-2i\pi nt/a} dt.$$

Décalage temporel :

$$\tilde{f}(t) = f(t - t_0) \longleftrightarrow c_n(\tilde{f}) = e^{-2i\pi nt_0/a} c_n(f)$$

Décalage fréquentiel :

$$\tilde{f}(t) = e^{2i\pi n_0 t/a} f(t) \longleftrightarrow c_n(\tilde{f}) = c_{n-n_0}(f)$$

Différentiation :

$$c_n(f') = 2i\pi n/a c_n(f) \quad (\text{si } f \text{ dérivable...})$$

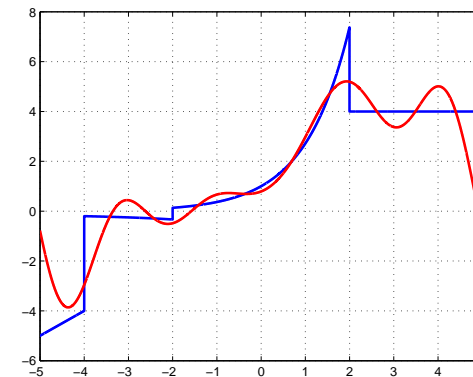
Signal réel :

Si f est réel alors $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$.

En particulier : $(|c_n(f)|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est pair.

Convergence dans L^2 : illustration

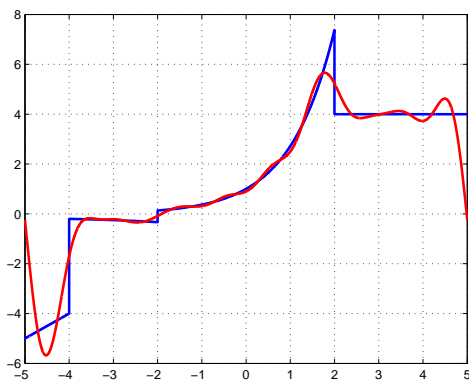
Reconstruction avec 10 coefficients.



Remarque : signal *périodique*.

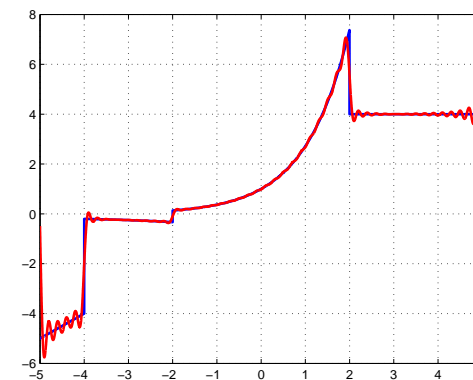
Convergence dans L^2 : illustration

Reconstruction avec 20 coefficients.



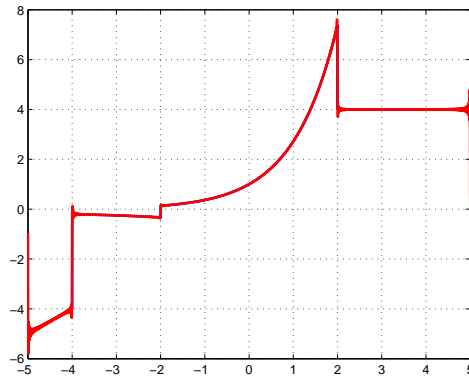
Convergence dans L^2 : illustration

Reconstruction avec 100 coefficients.



Convergence dans L^2 : illustration

Reconstruction avec 1000 coefficients.



(cf effet de Gibbs, ringing)

[Lien www](#)

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

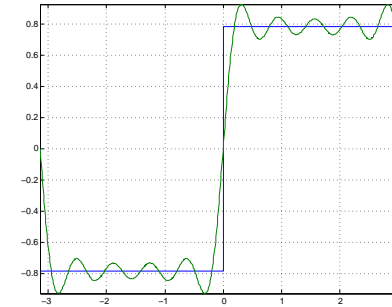
Conclusion

L'effet de Gibbs

Soit f 2π -périodique valant : $\begin{cases} -\pi/4 & \text{entre } -\pi \text{ et } 0 \\ \pi/4 & \text{entre } 0 \text{ et } \pi \end{cases}$

Sa série de Fourier est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

5 termes



On peut montrer que la valeur de l' "oscillation résiduelle" est constante et vaut : ~ 0.14 . (poly prop. 20 sec. 5.2.)

10/33

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

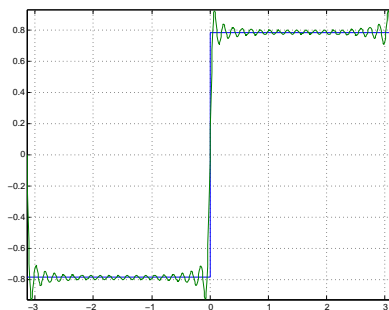
Conclusion

L'effet de Gibbs

Soit f 2π -périodique valant : $\begin{cases} -\pi/4 & \text{entre } -\pi \text{ et } 0 \\ \pi/4 & \text{entre } 0 \text{ et } \pi \end{cases}$

Sa série de Fourier est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

21 termes



On peut montrer que la valeur de l' "oscillation résiduelle" est constante et vaut : ~ 0.14 . (poly prop. 20 sec. 5.2.)

10/33

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

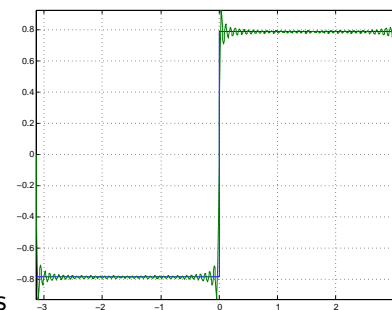
Conclusion

L'effet de Gibbs

Soit f 2π -périodique valant : $\begin{cases} -\pi/4 & \text{entre } -\pi \text{ et } 0 \\ \pi/4 & \text{entre } 0 \text{ et } \pi \end{cases}$

Sa série de Fourier est : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

41 termes



On peut montrer que la valeur de l' "oscillation résiduelle" est constante et vaut : ~ 0.14 . (poly prop. 20 sec. 5.2.)

10/33

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète

Transformée de Fourier Rapide

Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Séance 1

1 Les signaux périodiques

2 Signaux numériques

- Transformée de Fourier Discrète
- Transformée de Fourier Rapide
- Transformée de Fourier 2D

3 Conclusion

Signaux numériques

On s'intéresse à des signaux :

- *numériques* (donc nombre fini d'échantillons),
- considérés comme *périodiques*.

Exemple :

signal X de 60 échantillons :

$$X_0 = 2.5, X_1 = -1.3, X_2 = 0.5, \dots, X_{59} = -12.4.$$

Implicitement : $X_{60} = 2.5, X_{61} = -1.3, \dots, X_{-1} = -12.4, \dots$

Rappels préliminaires

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(ikx) = \begin{cases} N & \text{si } x = 0 [2\pi] \\ \frac{1-\exp(iNx)}{1-\exp(ix)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cas particulier : $x = 2\pi m/N$ (avec $m/N \notin \mathbb{Z}$)

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp(2i\pi km/N) = 0$$

Avec $\omega_N = e^{2i\pi/N}$, pour $1 \leq m \leq N-1$: $\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{km} = 0$

et si $m = 0 [N]$: $\sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{km} = N$

Une propriété remarquable

$$\text{Notation : } Y_n = \sum_{l=0}^{N-1} y_l \omega_N^{-nl} \quad \left(= \sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-2i\pi nl/N} \right)$$

Proposition

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_N^{nk} \quad \text{où } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_N^{nk} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} y_l \omega_N^{k(n-l)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(n-l)} \\ &= y_n. \end{aligned}$$

La Transformée de Fourier Discrète

Rappel : $Y_n = \sum_{l=0}^{N-1} y_l \omega_N^{-nl}$ et : $y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_N^{nk}$
 où $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

Définition - TFD

La transformation de (y_n) à (Y_n) est la *Transformée de Fourier Discrète* (TFD).

Propriété - TFDI

La transformation de (Y_n) à (y_n) est la *Transformée de Fourier Discrète Inverse* (TFDI).

Remarque 1 : les TFD et TFDI sont *linéaires*.

Remarque 2 : si $Y = \mathcal{F}(y)$ alors $y = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}(Y)}$.

Le spectre

Soit y un signal discret formé de N échantillons (prolongé comme un signal N -périodique)

Définitions

- (Y_n) est le *spectre* de y .
- $(|Y_n|)$ est le *spectre d'amplitude* de y .
- $(|Y_n|^2)$ est le *spectre de puissance* de y .

Remarque : les spectres sont N -périodique, comme (y_n) .

Propriétés de la TFD

Remarque 1 : cas d'un signal (y_n) réel

$$Y_{N-l} = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-(N-l)k} = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{lk} = \overline{Y_l}$$

Remarque 2 : translation = déphasage

$$\mathcal{F}(y_{\cdot+p}) = \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+p} \omega_N^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-n(k-p)} = Y_n \omega_N^{np}$$

Remarque 3 : égalité de Parseval pour les signaux discrets

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2$$

Démonstration : poly prop. 11 sec. 2.1.1.

TFD et composantes fréquentielles

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega_N^{nk} \quad \left(= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2i\pi nk/N} \right)$$

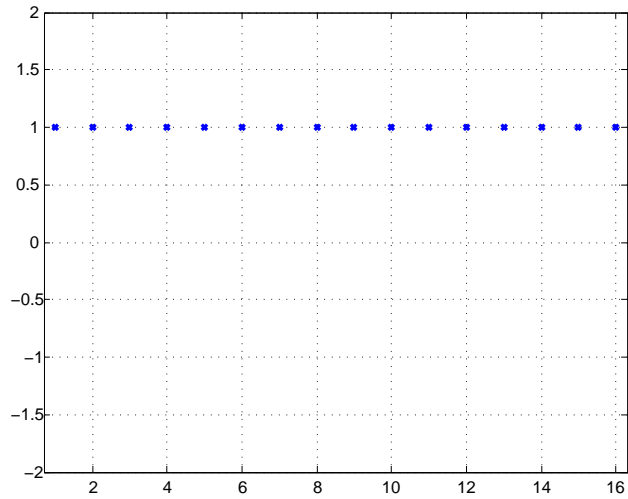
→ $|Y_k|$ est l'amplitude de la composante « sinusoïdale » de fréquence k/N [1].

- $Y_0 = \sum_{k=0}^{N-1} y_k$
- $|Y_1| = |Y_{N-1}|$ amplitude de la composante de fréquence $1/N$, i.e. période N échantillons
- $|Y_2| = |Y_{N-2}|$ amplitude de la composante de fréquence $2/N$, i.e. période $N/2$ échantillons
- ...
- $|Y_{N/2}|$ amplitude de la composante de fréquence $1/2$, i.e. période 2 échantillons (*cas N pair*)

Illustration

Spectre : $Y=(16\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

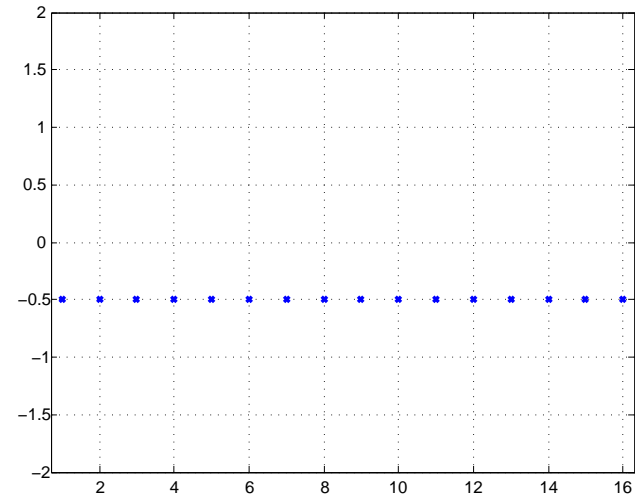
Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Illustration

Spectre : $Y=(-8\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

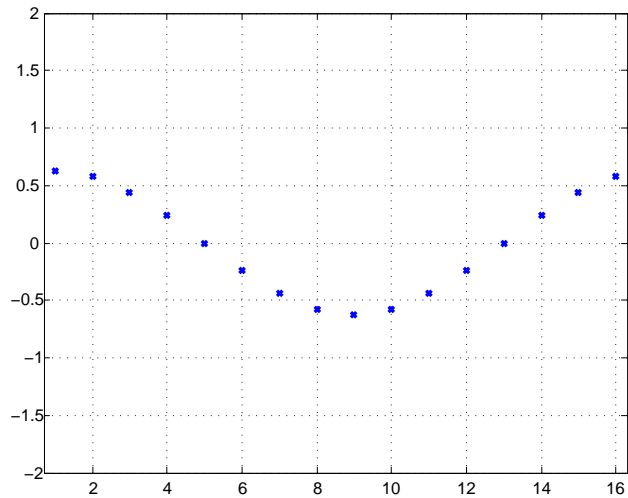
19/33

19/33

Illustration

Spectre : $Y=(0\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 5)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

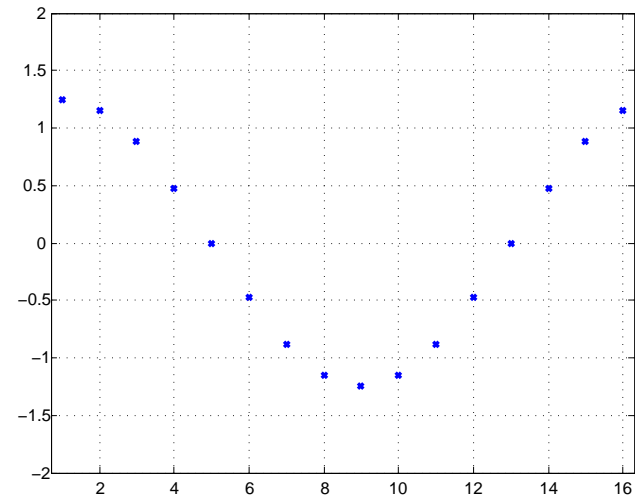
Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Illustration

Spectre : $Y=(0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 10)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

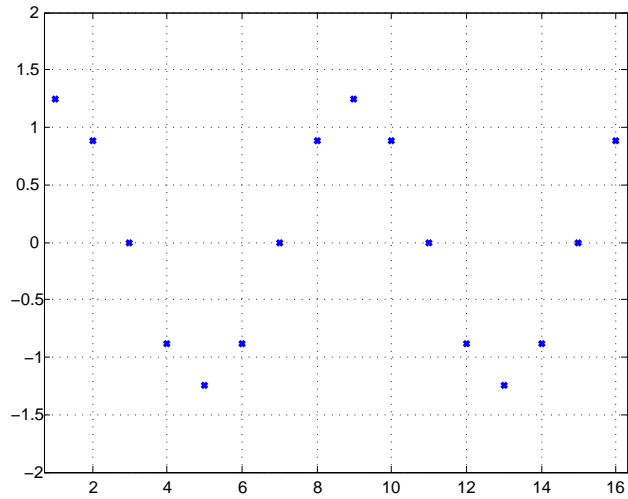
19/33

19/33

Illustration

Spectre : $Y=(0\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 0)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

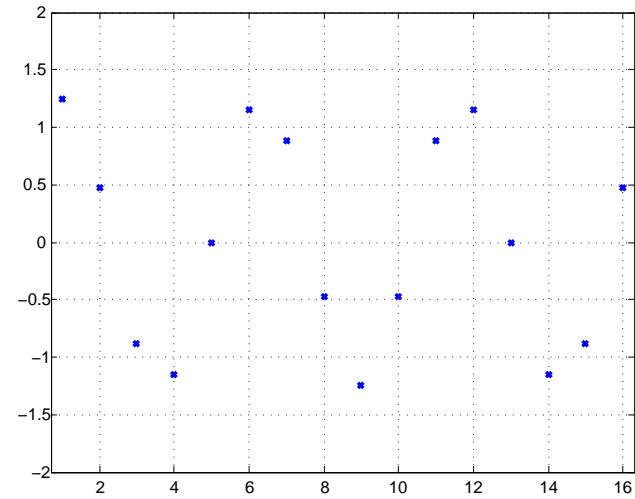
Conclusion

19/33

Illustration

Spectre : $Y=(0\ 0\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 0\ 0)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

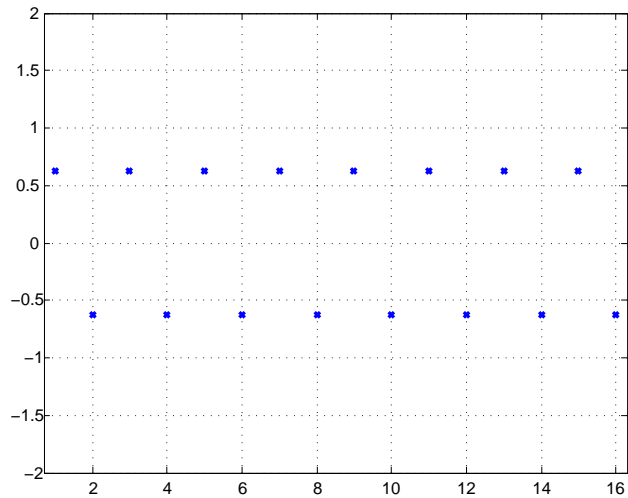
Conclusion

19/33

Illustration

Spectre : $Y=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

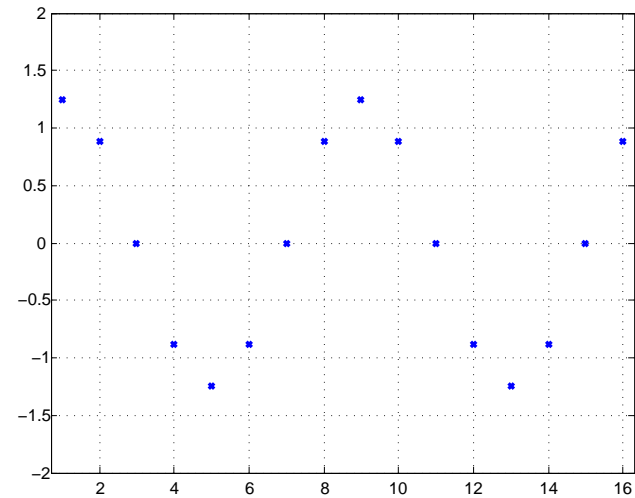
Conclusion

19/33

Illustration

Spectre : $Y=(0\ 0\ 10\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 10\ 0)$

Signal : $y=\text{TFDI}(Y)$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

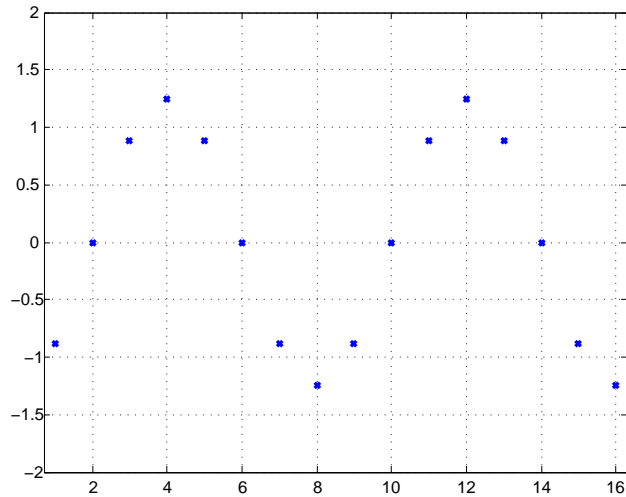
Conclusion

19/33

Illustration

$$\text{Spectre : } Y = (0 \ 0 \ 10e^{-2\pi(2-3)/16i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10e^{2\pi(2-3)/16i} \ 0)$$

$$\text{Signal : } y = \text{TFDI}(Y)$$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

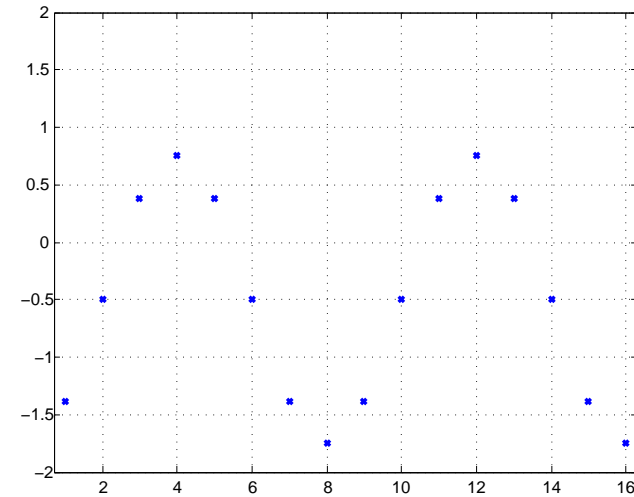
Conclusion

19/33

Illustration

$$\text{Spectre : } Y = (-8 \ 0 \ 10e^{-2\pi(2-3)/16i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10e^{2\pi(2-3)/16i} \ 0)$$

$$\text{Signal : } y = \text{TFDI}(Y)$$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

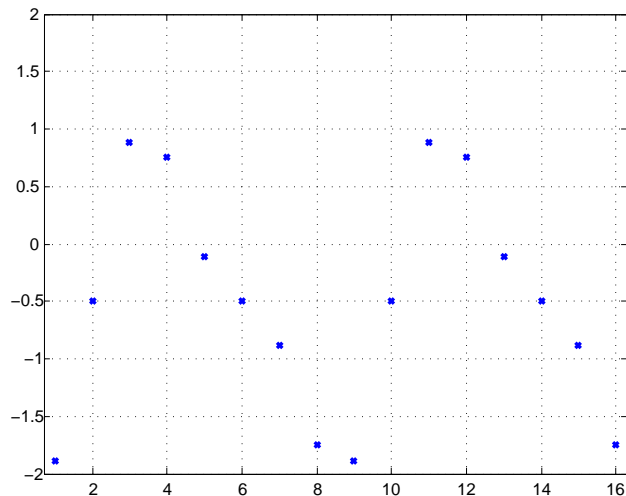
Conclusion

19/33

Illustration

$$\text{Spectre : } Y = (-8 \ 0 \ 10e^{-2\pi(2-3)/16i} \ 0 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -4 \ 0 \ 10e^{2\pi(2-3)/16i} \ 0)$$

$$\text{Signal : } y = \text{TFDI}(Y)$$



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

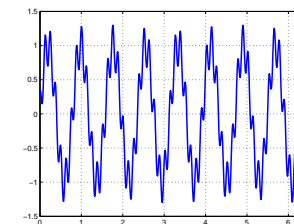
Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

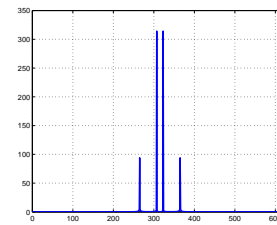
Conclusion

19/33

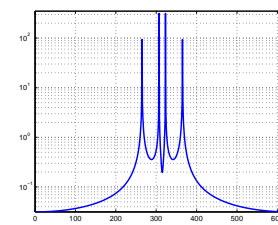
Exemple



un signal périodique



son spectre d'amplitude



...en échelle log

- attention au choix de l'axe des abscisses... (fftshift)
- symétrie du spectre, décroissance des coefficients.
- deux pics = deux composantes périodiques.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

20/33

Problème algorithmique pour le calcul de la TFD

$$Y_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk} \text{ où } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Calcul des Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1} : $\mathcal{O}(N^2)$ opérations.

Problème pratique :

1s de son échantillonné à 44.1kHz (qualité CD)

→ $N = 44100$

→ $N^2 = 2.10^9$

→ calcul de la TFD en $\sim 2s$ sur un PC à 1GHz...

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

La Transformée de Fourier Rapide (1)

$$Y_n = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk} = P(\omega_N^{-n}) \text{ avec } P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k X^k.$$

Hypothèse (fondamentale) : N est une puissance de 2

$$\text{Avec : } Q(X) = \sum_{k=0}^{N/2-1} y_{2k} X^k \text{ et } R(X) = \sum_{k=0}^{N/2-1} y_{2k+1} X^k.$$

$$\text{On a : } Y_n = P(\omega_N^{-n}) = Q((\omega_N^{-n})^2) + \omega_N^{-n} R((\omega_N^{-n})^2).$$

$$\text{Donc } Y_n = Q(\omega_{N/2}^{-n}) + \omega_N^{-n} R(\omega_{N/2}^{-n}).$$

Remarque 1 : $\omega_{N/2}^{-n} = \omega_{N/2}^{N/2-n}$ si $n \geq N/2$.

Remarque 2 : $(Q(\omega_{N/2}^{-n}))_{0 \leq n < N/2}$ et $(R(\omega_{N/2}^{-n}))_{0 \leq n < N/2}$ sont des TFD de signaux de taille $N/2$.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

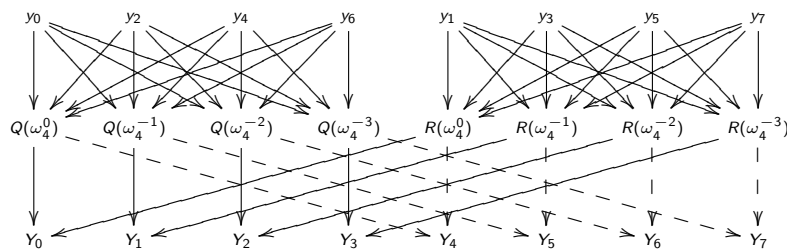
21/33

22/33

La Transformée de Fourier Rapide (2)

$$Y_n = Q(\omega_{N/2}^{-n}) + \omega_N^{-n} R(\omega_{N/2}^{-n}).$$

Illustration ($N = 8$) :



TFD d'un signal de longueur N
⇕
deux TFD de signaux de longueur $N/2$

→ On itère !

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

La Transformée de Fourier Rapide (3)

TFR ou **FFT** (Fast Fourier Transform)
Cooley-Tuckey 1965 (~ Gauss 1805).

$$Y_n = Q(\omega_{N/2}^{-n}) + \omega_N^{-n} R(\omega_{N/2}^{-n}).$$

Nombre d'opérations : $T(N) \simeq 2T(N/2) + 2N$

Donc : $T(N) = \mathcal{O}(N \log(N))$.

(preuve au tableau)

→ Pour un signal d'une seconde échantillonné à 44,1 kHz,
 $N \log(N) = 7.10^5$, calcul en $\simeq 7.10^{-4}$ s.

→ Ouvrir la porte à la révolution numérique !

Au fait : et si N n'est pas une puissance de 2 ?

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

23/33

24/33

Les images vues comme des signaux 2D

Image de N lignes et M colonnes
 = tableau $(X_{n,m})$ des niveaux de gris (taille : $N \times M$).

Attention, le signal est *périodique*...

Ici :



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
 Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
 Transformée de Fourier Rapide
 Transformée de Fourier 2D

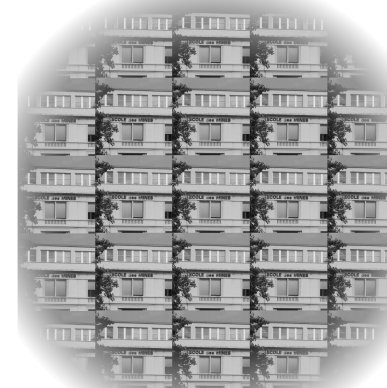
Conclusion

Les images vues comme des signaux 2D

Image de N lignes et M colonnes
 = tableau $(X_{n,m})$ des niveaux de gris (taille : $N \times M$).

Attention, le signal est *périodique*...

Ici :



De la photographie numérique à la photographie computationnelle
 Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
 Transformée de Fourier Rapide
 Transformée de Fourier 2D

Conclusion

25/33

25/33

La transformée de Fourier 2D

Soit $(X_{n,m})_{\substack{0 \leq n < N \\ 0 \leq m < M}}$ un signal discret 2D.

Définition - Transformée de Fourier Discrète 2D

$$X_{n,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} x_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl}$$

où $0 \leq m < N$ et $0 \leq m < M$.

Toutes les propriétés précédentes restent valables.

Remarque : $X_{n,m} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{M-1} x_{k,l} \omega_N^{-nl} \right) \omega_N^{-mk}$

→ le calcul des $X_{n,m}$ revient au calcul de $2N$ TFD-1D.

Complexité algorithmique de la FFT-2D : $\mathcal{O}(N^2 \log(N))$.

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
 Séance 2

F. Sur - ENSMN

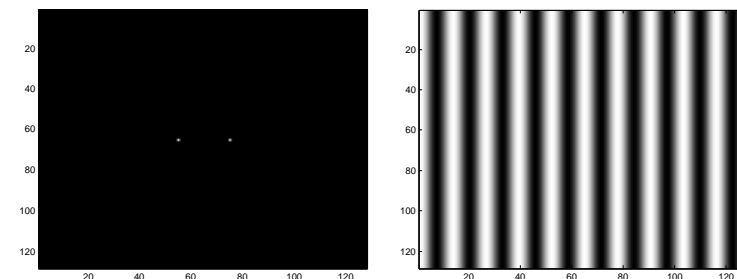
Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
 Transformée de Fourier Rapide
 Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Exemples



Spectre d'amplitude

Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
 Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

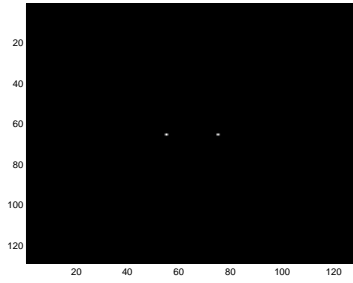
Transformée de Fourier Discrète
 Transformée de Fourier Rapide
 Transformée de Fourier 2D

Conclusion

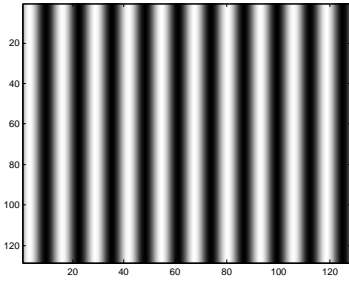
26/33

27/33

Exemples



Spectre d'amplitude



Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

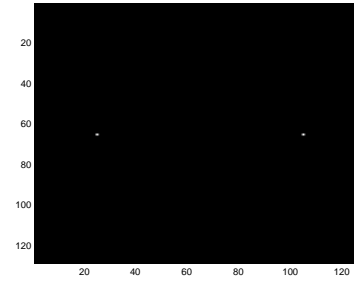
Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

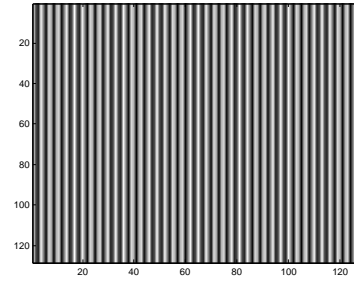
Conclusion

27/33

Exemples



Spectre d'amplitude



Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

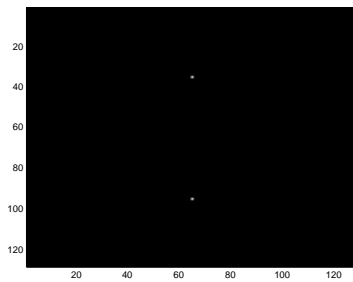
Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

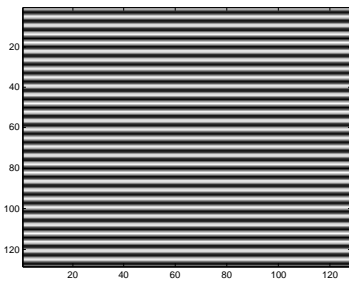
Conclusion

27/33

Exemples



Spectre d'amplitude



Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

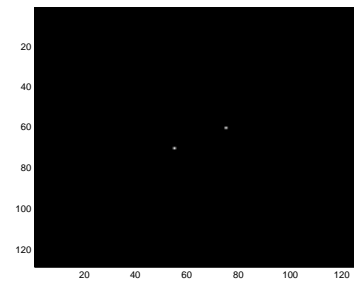
Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

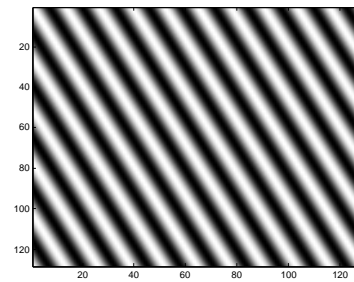
Conclusion

27/33

Exemples



Spectre d'amplitude



Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

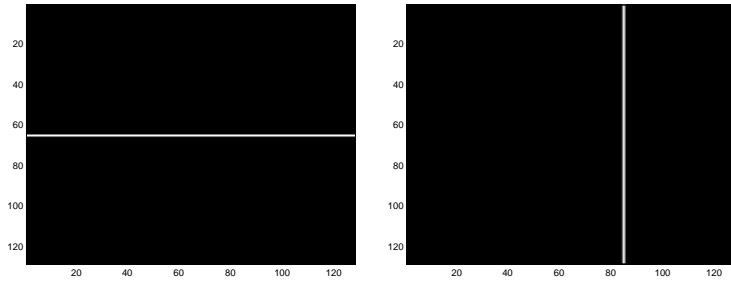
Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

27/33

Exemples



Spectre d'amplitude

Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

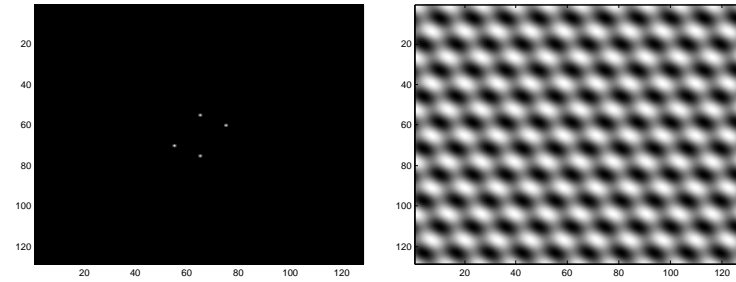
Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Exemples



Spectre d'amplitude

Image

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

27/33

27/33

Exemple



image originale

spectre

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

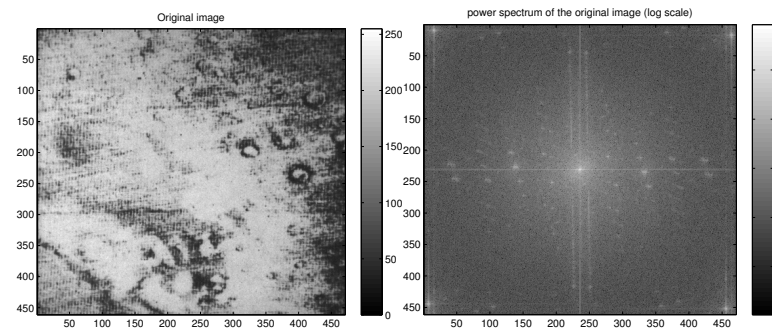
Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

- symétrie, décroissance des coefficients
- ligne horizontale / verticale penchée ?
- attention aux discontinuités gauche/droite et haut/bas.

Pourquoi ces taches dans le spectre ?



(image Mariner 6 : R. Gonzalez and R. Woods, *Digital Image Processing* 3rd ed., Prentice-Hall 2006.)

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

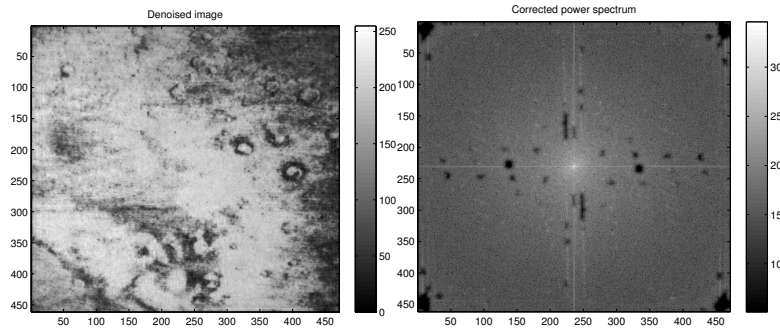
Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

28/33

29/33

Restauration



(F. S., M. Grédiac, *Automated removal of quasiperiodic noise using frequency domain statistics*, IS&T/SPIE Journal of Electronic Imaging, vol. 24, nr. 1, 2015.)

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

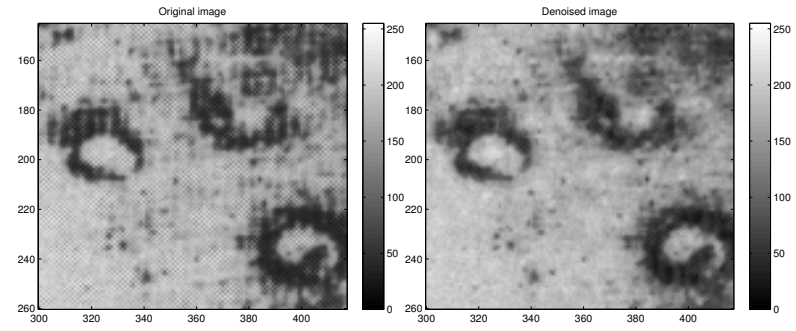
Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Détail



(F. S., M. Grédiac, *Automated removal of quasiperiodic noise using frequency domain statistics*, IS&T/SPIE Journal of Electronic Imaging, vol. 24, nr. 1, 2015.)

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

30/33

31/33

Séance 1

1 Les signaux périodiques

2 Signaux numériques

- Transformée de Fourier Discrète
- Transformée de Fourier Rapide
- Transformée de Fourier 2D

3 Conclusion

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

Conclusion

- Idée du cours : représenter un signal périodique par une superposition de signaux périodiques.
- Informations périodiques apparaissent plus clairement dans le spectre (elles y sont *bien localisées*).
- La FFT a rendu possible la révolution numérique. (*sans FFT, pas de baladeur MP3, télévision numérique, etc*)

De la photographie numérique à la photographie computationnelle
Séance 2

F. Sur - ENSMN

Les signaux périodiques

Signaux numériques

Transformée de Fourier Discrète
Transformée de Fourier Rapide
Transformée de Fourier 2D

Conclusion

32/33

33/33